UNIVERSIDAD DE MURCIA
Miguel Albaladejo Serrano
Licenciatura en Física
mas4@alu.um.es

Problema 16: Condensador Plano

Miguel Albaladejo Serrano

1. Enunciado

Dos placas infinitas, paralelas, conductoras, están separadas por una distancia d. Si las placas tienen densidades de carga uniformes σ y $-\sigma$, respectivamente, obténgase una expresión para el campo eléctrico entre las placas. Demuéstrese que el campo eléctrico en las regiones exteriores a las placas es cero. [Dos placas conductoras paralelas cargadas, de área finita, producen esencialmente el mismo campo eléctrico en la región que hay entre ellas, como se vio antes, siempre que las dimensiones de las mismas sean grandes en relación con su separación d]. Dicha disposición se llama *condensador*.

2. Resolución mediante integración

En la figura 1 podemos apreciar una disposición esquemática de nuestro sistema.

Por el principio de superposición, podemos descomponer el campo en un punto interior del sistema en la suma de los campos que generan las dos placas en dicho punto. Es decir, $\bar{E}_T(P) = \bar{E}_+(P) + \bar{E}_-(P)$.

Para resolver el problema del campo eléctrico en el interior calcularemos el creado por una sección cargada de tamaño infinitesimal, e integraremos esta expresión para todos los posibles

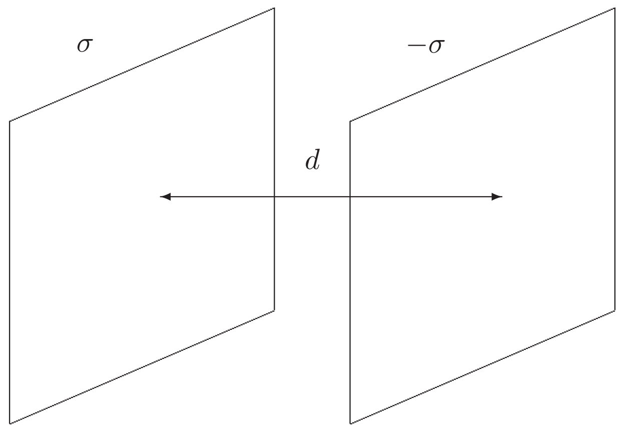

Figura 1: Esquema del condensador plano

valores que pueda tomar.

El campo que una sección diferencial crea sobre un punto arbitrario P del espacio viene dado por:

$$\mathrm{d}\bar{E}_+(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}s}{R^3}\bar{R} \tag{1}$$

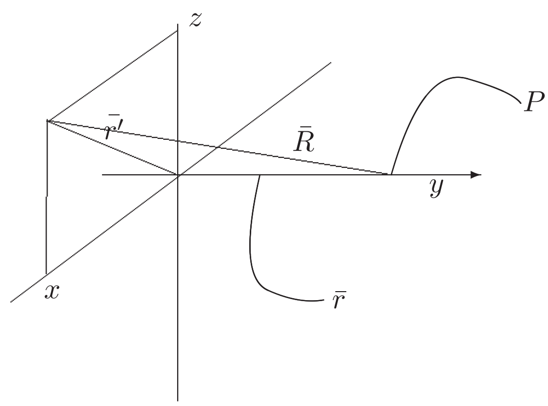

Figura 2: Sistema de coordenadas cartesianas

En nuestro caso tenemos, como se observa en la figura 2:

$$\begin{aligned}
\bar{r} &= r\hat{\jmath} \\
\bar{r}' &= x\hat{\imath} + z\hat{k} \\
\bar{R} &= x\hat{\imath} - r\hat{\jmath} + z\hat{k} \\
R^3 &= \left(x^2 + r^2 + z^2\right)^{3/2} \\
\mathrm{d}s &= \mathrm{d}x\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) e integrando, obtenemos:

$$\bar{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \frac{\sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}z}{(x^2+r^2+z^2)^{3/2}}(x\hat{\imath} - r\hat{\jmath} + z\hat{k}) \tag{2}$$

Esto supone hacer seis integrales, pero pronto veremos que en realidad sólo necesitamos hacer dos de ellas. Tenemos los siguientes casos[1]:

Dirección $\hat{\imath}$ $\hat{k}$ En éstas direcciones las integrales se van a anular. Por ejemplo, en el caso de la dirección x, tenemos[2]:

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \frac{\sigma x \mathrm{d}x\mathrm{d}z}{(x^2+r^2+z^2)^{3/2}} = \lim_{L\to\infty} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}z\left(-\frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}}\right) = 0 \tag{4}$$

En la dirección z, como las variables x y z son totalmente simétricas, tenemos la misma anulación.

Dirección $\hat{\jmath}$ En esta dirección tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \frac{\sigma r \mathrm{d}x\mathrm{d}z}{(x^2+r^2+z^2)^{3/2}} = \lim_{L\to\infty} \frac{\sigma r}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L} \frac{2\mathrm{d}z}{r^2+z^2} \tag{5}$$

$$= \frac{2r\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{6}$$

Es decir, el campo creado por la placa positiva es:

$$\bar{E}_+(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_r \tag{7}$$

Donde $\hat{u}_r$ es un vector unitario en la dirección perpendicular a la placa, desde ésta hacia el punto (ver figura 1). Para la placa negativa, tendremos que:

$$\bar{E}_-(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_r \tag{8}$$

Por tanto, el campo total en el interior de la placa vendrá dado por:

$$\boxed{\bar{E}_T(P) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{u}_{+\to -}} \tag{9}$$

---

[1]Usaremos las siguientes integrales:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^{3/2}} = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{3a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{r^2+z^2} = \frac{\pi}{r} \tag{3b}$$

$$\int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^{3/2}} = \frac{L}{a^2\sqrt{L^2}} - \frac{-L}{a^2\sqrt{L^2}} = \frac{2}{a^2} \qquad L \gg r, z \tag{3c}$$

[2]Definimos a mediante $a^2 = r^2 + z^2$

En la anterior expresión, $\hat{u}_{+\rightarrow -}$ es un vector que va desde la placa positiva hacia la negativa.

En el exterior, el campo creado por la placa positiva y por la negativa tienen el mismo valor en módulo, pero en dirección contraria: el creado por la positiva va hacia afuera, mientras que el creado por la placa negativa se cancela, como se puede observar esquemáticamente en la figura 3.

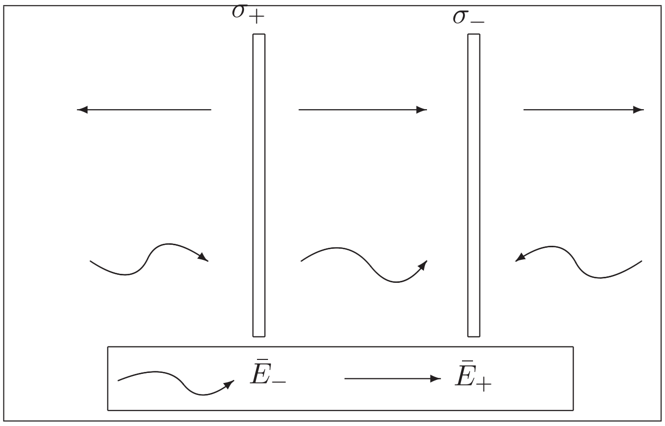

Figura 3: Los campos en el exterior se cancelan, mientras que en el interior se suman

3. Resolución mediante la ley de Gauss

Para resolver otra ver este mismo problema, pero mediante la ley de Gauss, vamos a calcular el campo que crea una placa, sin importar el signo de su carga, y después extenderemos el resultado.

La ley de Gauss afirma que el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada dentro de ella:

$$\oint_\Sigma \bar{E}\mathrm{d}\bar{s} = \frac{Q_\Sigma}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

El campo creado por la placa será perpendicular a ésta, y el vector de superficie tiene la misma dirección para las dos caras paralelas a la placa, mientras que para las otras cuatro caras estos dos vectores son perpendiculares ($\bar{E}\perp\mathrm{d}\bar{s}$), y por tanto el flujo a través de ellas será nulo (ver figura 4). Además, el campo no dependerá de la posición. Así pues, podemos escribir la ecuación (10) de la siguiente manera:

$$\oint_\Sigma \bar{E}\mathrm{d}\bar{s} = \int_{2\Sigma_P} E\mathrm{d}s = E\int_{2\Sigma_P}\mathrm{d}s = E\cdot 2A = \frac{Q_\Sigma}{\varepsilon_0} = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \tag{11}$$

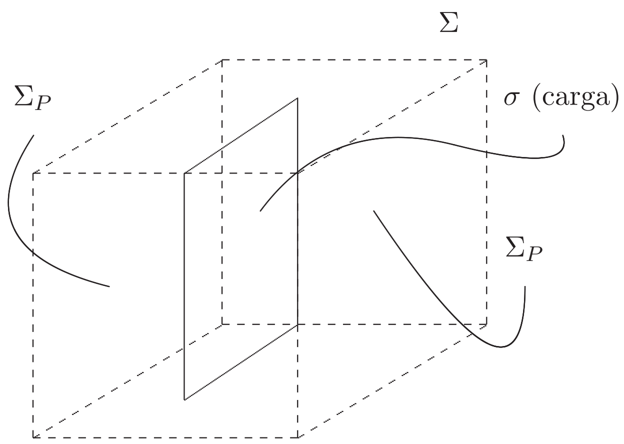

Figura 4: Placa encerrada por una superficie gaussiana imaginaria

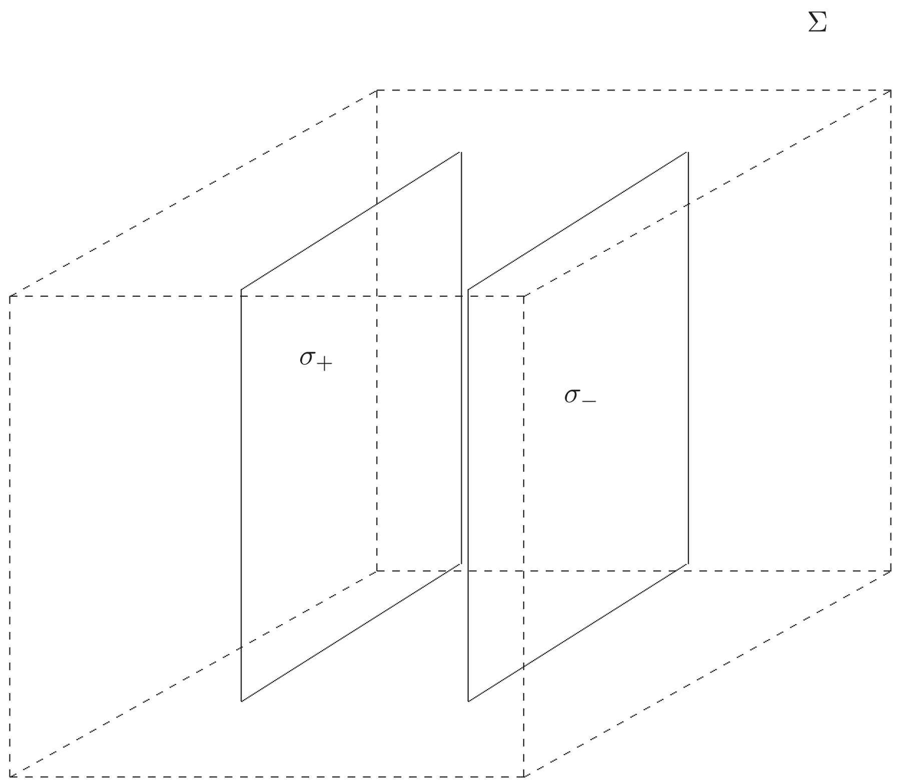

Figura 5: Placas encerradas por una superficie gaussiana. El campo en el exterior se anula

Así, análogamente a como razonábamos según la figura 3, el campo en el interior creado por las dos placas se suma, obteniéndose la solución dada por (9). De la misma manera podemos deducir que el campo en el exterior se anula. Pero es que, además, si consideramos una nueva superficie imaginaria gaussiana que encierre a ambas placas, podemos comprobar que al ser las placas iguales, y cargadas con signo contrario, la carga neta en el interior es nula, y por tanto el campo eléctrico calculado en cualquier punto exterior al espacio entre placas es nulo, como se ve en la figura 5.