

# PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Miguel Albaladejo Serrano  
Licenciatura en Física  
mas4@alu.um.es

## Resumen

Se demuestra el principio de incertidumbre de Heisenberg para dos observables  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  cuyo conmutador es  $[A, B] = C$ .

Supongamos que tenemos dos observables,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , cuyo conmutador es:

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = C \quad (1)$$

Si tenemos un vector  $|\Psi\rangle$  normalizado, podemos hacer actuar un operador (que nunca podrá ser un observable) de la forma  $\mathcal{A} + i\mathcal{B}$ , obteniendo  $|\varphi\rangle = (A + i\lambda B)|\varphi\rangle$ . Su norma habrá de ser mayor o igual que cero,  $\langle\varphi|\varphi\rangle$ :

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\Psi|A^2 + \lambda^2 B^2 + i\lambda[A, B]|\Psi\rangle = \lambda^2\langle B^2\rangle + iC\lambda + \langle A^2\rangle \geq 0 \quad (2)$$

Por tanto el discriminante de la anterior ecuación en el caso de igualdad ha de ser menor o igual que cero, por lo que:

$$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{|C|^2}{4} \quad (3)$$

Si ahora definimos dos operadores a partir de los anteriores de esta manera:

$$A' = A - \langle\Psi|A|\Psi\rangle \quad (4a)$$

$$B' = B - \langle\Psi|B|\Psi\rangle \quad (4b)$$

Se cumplirá la siguiente relación de conmutación, pues los dos últimos términos de las definiciones son constantes:

$$[A', B'] = C \quad (5)$$

Por tanto también se cumplirá que:

$$\langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle \geq \frac{|C|^2}{4} \quad (6)$$

Pero si ahora calculamos, según su definición,  $\langle A'^2 \rangle$  y  $\langle B'^2 \rangle$ , obtendremos:

$$\langle A'^2 \rangle = \langle \Psi | A'^2 | \Psi \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = (\Delta A)^2 \quad (7a)$$

$$\langle B'^2 \rangle = \langle \Psi | B'^2 | \Psi \rangle = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = (\Delta B)^2 \quad (7b)$$

Y, por tanto, se tiene que:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{|C|}{2} \quad (8)$$

Este es el *principio de incertidumbre* o *incerteza* de Heisenberg. Es importante notar que, aunque en el desarrollo habitual se parte de la ecuación de Schrödinger y del formalismo de onda, y se llega a demostrar 8, el desarrollo puede ser invertido y, postulando 8, alcanzar la formulación de funciones de onda y demostrar la ecuación de Schrödinger.